

Pesquisa Operacional I

Programação Linear

Haron Calegari Fanticelli

*Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
Uned Itaguaí*

2 de abril de 2024

Programação

- 1 Recapitulação
 - Forma-padrão
 - Método do Gráfico

- 2 O Método Simplex
 - Introdução
 - Forma Tabular (Algoritmo)
 - Exemplo

- 3 Atividade de Aprendizagem

- 4 Referências e Próxima Aula

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Modelo de Otimização

- Forma-padrão (HILLIER, 2010):

Maximizar: $f(\mathbf{x})$

Sujeito a: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

e: $\mathbf{x} \geq 0$

Modelo de Otimização

■ Forma-padrão (HILLIER, 2010):

Maximizar: $f(\mathbf{x})$

Sujeito a: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

e: $\mathbf{x} \geq 0$

■ Exemplo:

Maximizar: $Z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeito a: $x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

e: $\mathbf{x} \geq 0$

Modelo de Otimização

■ Forma-padrão (HILLIER, 2010):

Maximizar: $f(\mathbf{x})$

Sujeito a: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

e: $\mathbf{x} \geq 0$

■ Exemplo:

Maximizar: $Z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeito a: $x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

e: $\mathbf{x} \geq 0$

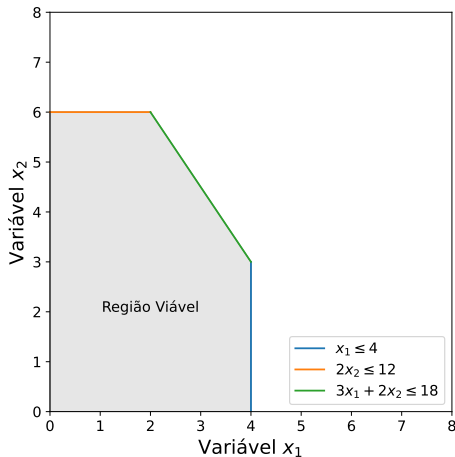


Figura: Gráfico de Região Viável

Modelo de Otimização

■ Forma-padrão (HILLIER, 2010):

Maximizar: $f(\mathbf{x})$

Sujeito a: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

e: $\mathbf{x} \geq 0$

■ Exemplo:

Maximizar: $Z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeito a: $x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

e: $\mathbf{x} \geq 0$

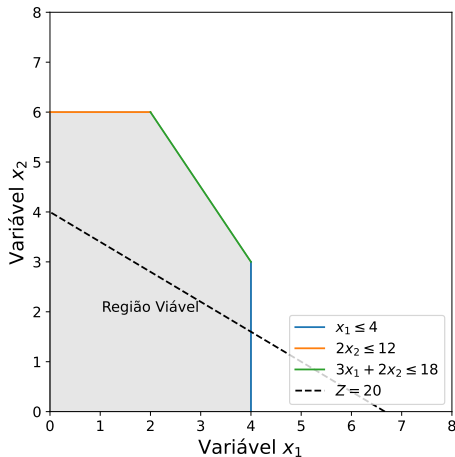


Figura: Gráfico de Região Viável

O Método Simplex

Introdução

- Proposto em 1947 por George B. Dantzig;
- 2000: Reconhecido como um dos 10 algoritmos mais importantes do século 20 (IEEE);

George Bernard Dantzig: The Pioneer of Linear Optimization

Management and Business Review, Vol. 1, No. 1, Winter 2021

3 Pages • Posted: 2 Sep 2021

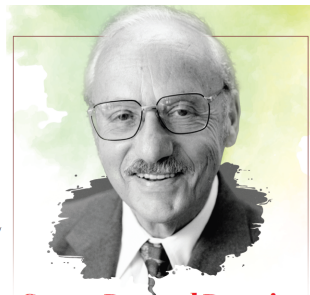
[John R. Birge](#)

University of Chicago - Booth School of Business

Date Written: 2021

Abstract

George Dantzig introduced the world to the power of optimization, creating trillions of dollars of value and saving countless years of life across the globe. In this laudation, John Birge describes the fascinating life and incredible accomplishments of a scholar whose footprints led the way to almost everything the global economy produces.



George Bernard Dantzig:

The Pioneer of Linear
Optimization

Forma Tabular do Simplex

- **Config 01:** Colocar o modelo na forma padrão;

$$\text{Maximizar: } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$\text{e: } x \geq 0$$

Forma Tabular do Simplex

- **Config 01:** Colocar o modelo na forma padrão (Variáveis de Folga);

Maximizar: $Z = 3x_1 + 5x_2 + 0f_1 + 0f_2 + 0f_3$

Sujeito a:

$$x_1 + f_1 = 4$$

$$2x_2 + f_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + f_3 = 18$$

e: $x \geq 0 \quad f \geq 0$

Forma Tabular do Simplex

- **Config 01:** Colocar o modelo na forma padrão (Variáveis de Folga);
- **Config 02:** Colocar a função objetivo $Z = 0$;

$$\text{Maximizar: } Z - 3x_1 - 5x_2 - 0f_1 - 0f_2 - 0f_3 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + f_1 = 4$$

$$2x_2 + f_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + f_3 = 18$$

$$\text{e: } \mathbf{x} \geq 0 \quad \mathbf{f} \geq 0$$

Forma Tabular do Simplex

- **Config 01:** Colocar o modelo na forma padrão (Variáveis de Folga);
- **Config 02:** Colocar a função objetivo $Z = 0$;
- **Config 03:** Tabular as variáveis;
- **Config 04:** Variáveis Básicas = 0 / Solução Inicial na Origem;

VB	Z	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	=
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
f_1	0	1	0	1	0	0	4
f_2	0	0	2	0	1	0	12
f_3	0	3	2	0	0	1	18

Forma Tabular do Simplex

1ª Iteração

- **Passo 01:** Coluna Pivô (Objetivo) - Escolher Menor valor (negativo);

VB	Z	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	=
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
f_1	0	1	0	1	0	0	4
f_2	0	0	2	0	1	0	12
f_3	0	3	2	0	0	1	18

Forma Tabular do Simplex

1ª Iteração

- **Passo 01:** Coluna Pivô (Objetivo) - Escolher Menor valor (negativo);
- **Passo 02:** Linha Pivô (Restrições) - Escolher Menor Razão (positivo);

VB	Z	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	=
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
f_1	0	1	0	1	0	0	4
f_2	0	0	2	0	1	0	12
f_3	0	3	2	0	0	1	18

Forma Tabular do Simplex

1ª Iteração

- **Passo 01:** Coluna Pivô (Objetivo) - Escolher Menor valor (negativo);
- **Passo 02:** Linha Pivô (Restrições) - Escolher Menor Razão (positivo);
- **Passo 03:** Fazer a troca de variáveis - Operações Elementares;

			↓				
VB	Z	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	=
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
f_1	0	1	0	1	0	0	4
← f_2	0	0	2	0	1	0	12
f_3	0	3	2	0	0	1	18

Forma Tabular do Simplex

1ª Iteração

- **Passo 01:** Coluna Pivô (Objetivo) - Escolher Menor valor (negativo);
- **Passo 02:** Linha Pivô (Restrições) - Escolher Menor Razão (positivo);
- **Passo 03:** Fazer a troca de variáveis - Operações Elementares;
- **Passo 04:** Critério de Parada - Função objetivo não possuir valores negativos;

VB	Z	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	=
Z	1	-3	0	0	2.5	0	30
f_1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	0	0.5	0	6
f_3	0	3	0	0	-1	1	6

Forma Tabular do Simplex

2ª Iteração

- **Passo 01:** Coluna Pivô (Objetivo) - Escolher Menor valor (negativo);
- **Passo 02:** Linha Pivô (Restrições) - Escolher Menor Razão (positivo);
- **Passo 03:** Fazer a troca de variáveis - Operações Elementares;
- **Passo 04:** Critério de Parada - Função objetivo não possuir valores negativos;

VB	Z	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	=
Z	1	0	0	0	1.5	1	36
f_1	0	0	0	1	0.33	-0.33	2
x_2	0	0	1	0	0.5	0	6
x_1	0	1	0	0	-0.33	0.33	2

Forma Tabular do Simplex

2ª Iteração

- **Passo 01:** Coluna Pivô (Objetivo) - Escolher Menor valor (negativo);
- **Passo 02:** Linha Pivô (Restrições) - Escolher Menor Razão (positivo);
- **Passo 03:** Fazer a troca de variáveis - Operações Elementares;
- **Passo 04:** Critério de Parada - Função objetivo não possuir valores negativos;

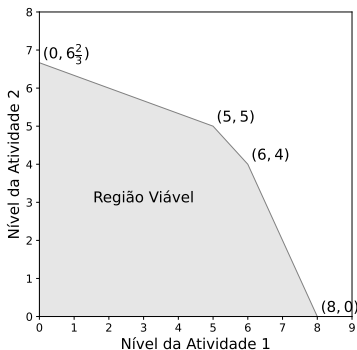
VB	Z	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	=
Z	1	0	0	0	1.5	1	36
f_1	0	0	0	1	0.33	-0.33	2
x_2	0	0	1	0	0.5	0	6
x_1	0	1	0	0	-0.33	0.33	2

Solução Ótima: $\mathbf{x} = (2, 6)$ e $Z = 36$

Atividade de Aprendizagem

Atividade de Aprendizagem

- **(1)** Um certo modelo de programação linear envolvendo duas atividades possui a região de soluções viáveis indicada a seguir.



O objetivo é maximizar o lucro total das duas atividades. O lucro unitário para a atividade 1 é de US\$ 1.000 e o lucro unitário para a atividade 2 é de US\$ 2.000.

- **(a)** Calcule o lucro total para cada solução de pontos extremos. Use esta informação para encontrar uma solução ótima.
- **(b)** Use os conceitos de solução do Método Simplex para identificar a sequência de soluções que seriam examinados pelo método até chegar a solução ótima.

Atividade de Aprendizagem

- (2) Pelo método simplex, passo a passo, solucione o problema a seguir:

$$\text{Maximizar } Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

$$\text{Sujeito a } 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$\text{e } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

- (3) Descreva graficamente o que o método simplex faz passo a passo para solucionar o problema a seguir:

$$\text{Maximizar } Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a } -3x_1 + x_2 \leq 1$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$4x_1 - x_2 \leq 10$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$\text{e } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Referências e Próxima Aula

Referências e Próxima Aula

- HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. Porto Alegre: Bookman, 2010.
- TAHA, Hamdy A. **Pesquisa Operacional**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

Próxima Aula

- Empate para a Coluna Pivô (Variável Básica que Entra);
- Empate para a Linha Pivô (Variável Básica que Sai);
- Nenhuma Linha Pivô (Variável Básica que Sai) - Z Ilimitado;
- Soluções Ótimas Múltiplas.

[illegible]